8 Теория чисел 8

Задача 8.1. Доказать, что $6^{2k} + 2^{k+4} \,\vdots\, 17$

Задача 8.2. Найдите $\gcd(2^n - 1, 2^m - 1)$

Задача 8.3. Докажите, что для каждого натурального m существует простое число, сумма цифр которого больше, чем m.

Задача 8.4. Покажите, что множество $-64, 38, 12, 19, 17, -11, -6, 7$ составляет полную систему вычетов по модулю 8, а $1, -19, -31, 27$ — приведённую.

Задача 8.5. Будем называть число *совершенно простым*, если при любая перестановка его цифр образует совершенно простое число. Докажите, что в записи такого числа не может быть более трёх различных цифр.

Задача 8.6. Докажите, что сумма $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2$ не является квадратом никакого целого числа.

Задача 8.7. Каким количеством нулей заканчивается число $300!_{24}$?

Задача 8.8. Докажите, что для нечётных n

$$n^n \equiv 1 \pmod 8$$

Задача 8.9. Докажите, что для любого n, такого, что $\gcd(n, 10) = 1$ существует число вида $1111\ldots11$, кратное n.

Задача 8.10. Для чисел a, b таких, что $\gcd(a, b) = 1$ докажите, что

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$$

Задача 8.11. Доказать, что если p — простое число, то $(p-1)! + 1 \,\vdots\, p$.

Задача 8.12. Доказать, что если $n > 2$, то числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ не могут быть простыми одновременно.

Задача 8.13. Докажите, что для существует такое n, что в последовательности чисел $n, n+1, \ldots, n+99$ ровно 10 простых чисел.

Задача 8.14. Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \cdots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?