# Математические основы информатики

## Игры.

Сергей Леонидович Бабичев

# Общие понятия.

- *Игра* — некое взаимодействие двух и более *игроков*.
- Мы будем рассматривать конечные игры с полной информацией.
- Игра заключается в поочерёдной *смене состояний*.
- Некое состояние игры называется *позицией*.
- Имеются *заключительные* позиции, в которых игра заканчивается и из которых нет ходов.
- Заключительные позиции имеют *оценку* — некоторое число, характеризующее степень выигрыша каждого из игроков.
- Цель игры для каждого игрока — достичь позиции с максимальной для него оценкой.

- Рассмотрим игру двоих игроков, при которой каждый игрок стремится достичь одной из заключительных позиций.
- Назовём *белыми* игрока, совершающего первый ход в игре.
- Назовём *чёрными* игрока, совершающего второй ход в игре.
- **Утверждение**: в каждой позиции имеются ровно две возможности:
  - у игрока, совершающего ход, есть способ, гарантирующий ему выигрыш;
  - для любого хода игрока, совершающего ход, у его соперника найдётся способ, позволяющий ему гарантировано выиграть.
- Множество всех позиций конъюнктивно разбивается на два множества — выигрышных и проигрышных.

- Заключительная позиция — *проигрышная*;
- Если существует хотя бы один ход в проигрышную позицию, то позиция — *выигрышная*.
- Если все ходы ведут в выигрышную позицию, то позиция — *проигрышная*.

- Обозначим выигрышную позицию за 1, а проигрышную — за 0.
- Введём обозначение *оценка позиции* $P$ как $F_P$, множество ходов, возможных из позиции $P$ как $M_p$, множество заключительных позиций как $G$. Тогда то:

$$F_P = \begin{cases} 0, & \text{если } P \in G. \\ 1, & \text{если } \exists m \in M_P : F_m = 0 \\ 0, & \text{если } \forall m \in M_P \quad F_m = 1 \end{cases} \tag{1}$$

- Это — обратная рекуррента.
- Она заполняется от заключительных позиций к начальным.

## Example

Игра начинается с числа $1$. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от $2$ до $7$. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее $1000$. Кто выиграет при правильной игре?

**Решение:**

## Доказательство.

В данном случае позиция — это одно число. Анализ с конца: все числа $\geqslant 1001$ являются проигрышными позициями.
Позиции, из которых можно попасть в проигрышные — выигрышные, от $143$ до $1000$ должны быть выигрышные.
Все числа от $72$ до $142$ являются проигрышными позициями, потому что из них можно попасть только в выигрышные: при домножении числа от $72$ до $142$ на число от $2$ до $7$ получается число от $144$ до $994$.
Продолжая аналогичным образом, получаем: позиции от $11$ до $71$ — выигрышные, позиции с $6$ по $10$ — проигрышные, и позиции с $1$ по $5$ — выигрышные.
Начальная позиция — выигрышная для белых. $\square$

# Дерево игры

**Example**

Петя и Вася играют в игру «камушки». На игровом поле находятся две кучки камней. Каждым ходом (а игроки ходят по очереди, причём первый ход делает Петя) можно либо добавить в любую из кучек три камня, либо удвоить количество камней в любой из кучек. Если после очередного хода на доске окажется больше $20$ камней, то совершивший ход выиграл. Нужно определить, кто из игроков выиграет при обоюдно лучшей игре, если перед первым ходом одна кучка содержит $2$ камня, а другая — $3$.

- Введём понятие «*дерева игры*».
- Каждую позицию будем кодировать парой чисел.
- Начальная позиция кодируется как $(2, 3)$.
- Из неё можно сделать ходы в позиции $(5, 3)$, $(4, 3)$ и $(2, 6)$.
- Различные ходы — удвоить количество камней во второй кучке и добавить три камня во вторую кучку — приводят к одной и той же позиции.
- На рисунке изображен первый возможный ход.

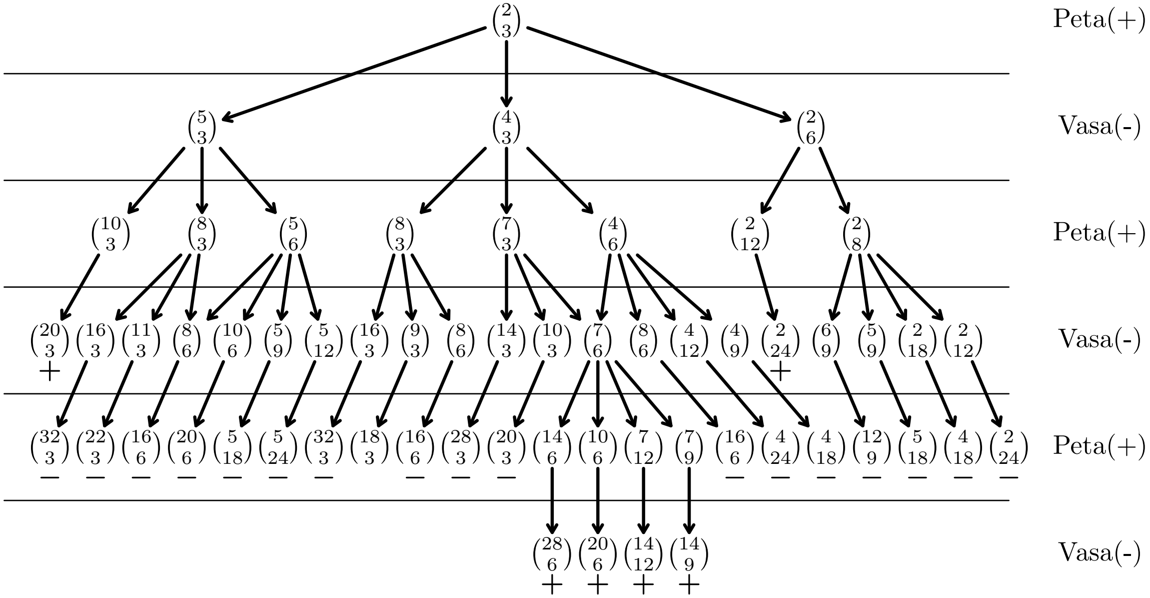
$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Из каждой позиции имеется несколько ответных ходов.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \binom{2}{3} \arrow[dlll] \arrow[d] \arrow[drrr] & & & & & \\
 & \binom{5}{3} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & \binom{4}{3} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & \binom{2}{6} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\binom{10}{3} & \binom{8}{3} & \binom{5}{6} & \binom{7}{3} & \binom{8}{3} & \binom{4}{6} & \binom{4}{6} & \binom{5}{6} & \binom{2}{12} & \binom{2}{9}
\end{tikzcd}
$$

- Некоторые позиции на втором уровне встречаются неоднократно: это позиции $(8,3)$, $(5,6)$, и $(4,6)$.
- С точки зрения игры эти позиции абсолютно равны, так как они достигнуты после двух полуходов и очередь хода у них одна и та же.
- Поэтому при построении дерева мы немного сэкономим наше время и не будем повторять ветки.

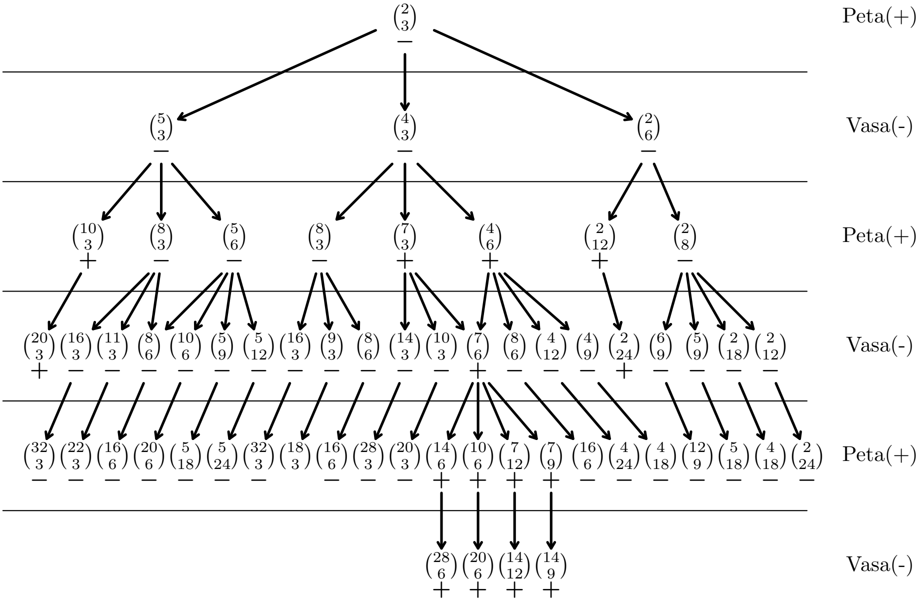
- Игра когда-то должна закончиться, после того, как заключительная позиция в какой-то ветке дерева достигнута, ветка перестаёт расти и вершина, в которой это произошло — *заключительная* или терминальная. Для удобства поставим в эту вершину число $+1$, если победил первый игрок и число $-1$ — если победил второй.
- Для удобства в дальнейшем разобьём наше дерево игры на уровни по очереди хода. Нарисуем дерево до самого конца, оно будет содержать почти все возможные игры.
- Почему почти? Если в какой-то позиции существует ход, заканчивающий игру, то, очевидно, игрок его должен сделать и победить.


Peta(+)
Vasa(-)
Peta(+)
Vasa(-)
Peta(+)
Vasa(-)

- Это — не оптимальное для обоих сторон дерево.
- Оно содержит ходы, которые в реальной игре ни за что бы не были сделаны проницательным игроком.
- В позиции $(4, 6)$ на третьем уровне при ходе Пети он может перейти своим ходом в позиции $(8, 6)$, $(4, 12)$, $(4, 9)$, в каждой из которых Вася своим ответным ходом одерживает победу.
- Но если он пойдёт в позицию $(7, 6)$, то на любой из четырёх возможных ходов Васи у него припасён победный ответ.

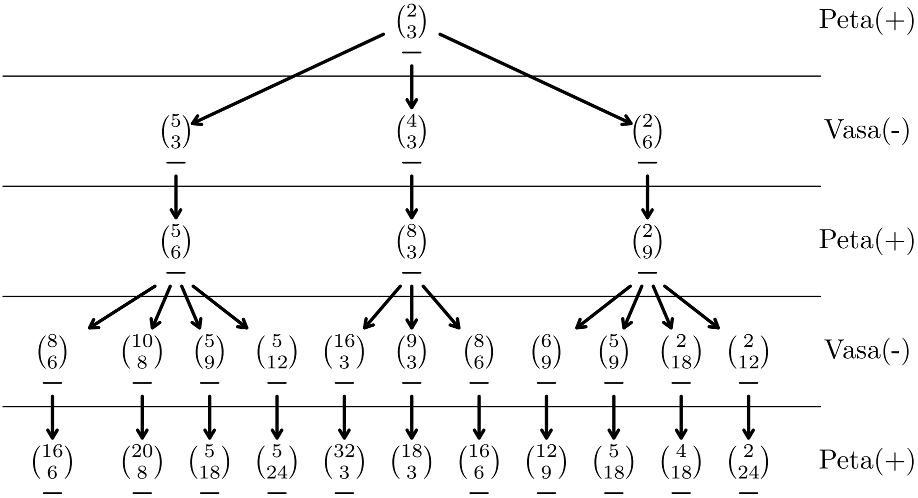
Применяем правило, аналогичное (1):

- Если хотя бы одна из позиций, которые могут получиться в результате хода из позиции $P$ не имеет оценки, то позицию $P$ пока не оцениваем и вернёмся к ней позже.
- Если при ходе Пети хотя бы один ход ведёт в позицию с оценкой $+1$, то позиции $P$ присваиваем $+1$, иначе присваиваем $-1$.
- Если при ходе Васи хотя бы один ход ведёт в позицию с оценкой $-1$, то позиции $P$ присваиваем $-1$, иначе присваиваем $+1$.




При лучшей игре обоих сторон выигрывает Вася.

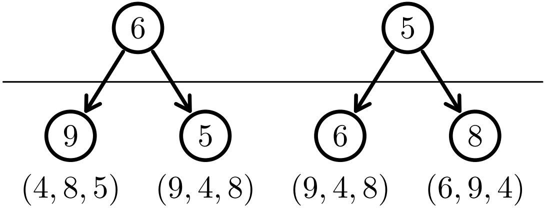
Сокращённое дерево:



## Example

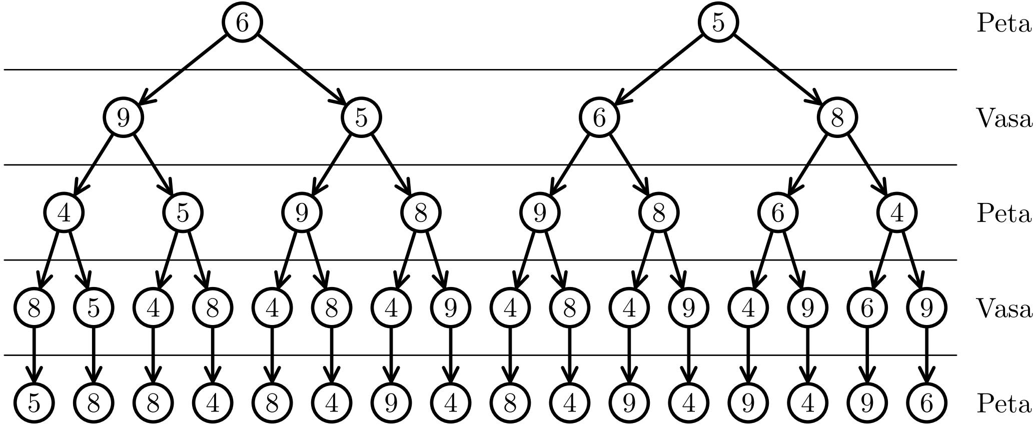
На доске написано несколько чисел в ряд. Петя может стереть число с любого края. Затем эту операцию проделывает Вася и далее они стирают числа по очереди. Каждое стёртое число отправляется в копилку того, кто его стёр. Размер выигрыша определяется разностью между его суммой и суммой соперника в тот момент, когда все числа будут стёрты. Определить победителя игры и сумму его выигрыша. Ничья тоже является возможным вариантом развязки.

- Так как деревья игры мы строить уже научились, попробуем эту же идею применить ещё раз.
- Для примера возьмём следующую начальную позицию: $(6, 9, 4, 8, 5)$.
- Ход Пети и он может взять либо $6$ слева, либо $5$ справа.
- В ответ на первый ход Вася может взять либо $9$, либо $5$, а на второй — либо $6$, либо $8$. Нарисуем дерево игры после этих двух ходов (см. рис. ??).

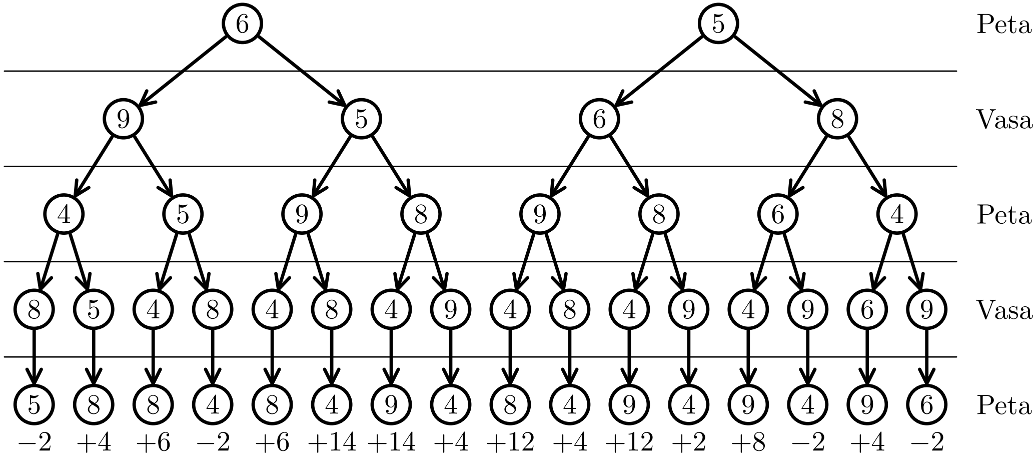



- Одна и та же позиция, $(9, 4, 8)$ получается после различной последовательности ходов? А ведь в одном случае суммарный выигрыш Пети составляет единицу, а во втором — такой же выигрыш у Васи. Это означает, что, в отличии от предыдущей задачи, эти позиции не равны.

## Полное дерево игры



Полное дерево игры с оценками на нижнем уровне.



# Минимакс

Позиция $P$ получает оценку по следующему правилу:

- если хотя бы одна из позиций, которые могут получиться в результате хода из позиции $P$ не имеет оценки, то позицию $P$ пока не оцениваем и вернёмся к ней позже.
- При ходе Пети оценка позиции $P$ равна максимуму из оценок дочерних позиций.
- При ходе Васи оценка позиции $P$ равна минимуму из оценок дочерних позиций.

Правило минимакса обобщает результат предыдущей задачи.

# Игра Ним

# Правила игры

**Example**

Имеется несколько кучек камней. Два игрока поочерёдно берут камни из кучек. За ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает забравший последний камень.

# Одна кучка

- При одной кучке выигрыш первого игрока очевиден.

# Две кучки

- Таблица игры.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| 1 | | | |
| 0 | | | |
| | 0 | 1 | 2 |

# Две кучки

- Таблица игры.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| 1 | | | |
| 0 | | | |
| | 0 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| 1 | | | |
| 0 | - | | |
| | 0 | 1 | 2 |

# Две кучки

- Таблица игры.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | + | | |
| 1 | + | | |
| 0 | - | + | + |
| | 0 | 1 | 2 |

# Две кучки

- Таблица игры.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | + | | |
| 1 | + | | |
| 0 | - | + | + |
| | 0 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | + | | |
| 1 | + | - | |
| 0 | - | + | + |
| | 0 | 1 | 2 |

# Две кучки

- Таблица игры.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | + | + | + | + | - |
| 3 | + | + | + | - | + |
| 2 | + | + | - | + | + |
| 1 | + | - | + | + | + |
| 0 | - | + | + | + | + |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

# Три кучки

- Частный случай: если в каких-то двух кучках число камней одинаково — выигрывают белые.
- Но как закончится игра $(4, 6, 9)$?

# Три кучки

- Частный случай: если в каких-то двух кучках число камней одинаково — выигрывают белые.
- Но как закончится игра $(4, 6, 9)$?
- Исполним операцию `bitxor` со всеми числами.

$$0100 \;\; \text{bitxor} \;\; 0110 \;\; \text{bitxor} \;\; 1001 = 1011$$

.

**Theorem (Оценка позиции в ним-игре)**

*Позиция в ним выигрышная, если двоичное представление побитовой операции $xor$ содержит хотя бы одну единицу.*

# Переходы в ним-игре

**Definition (XOR-сумма)**

Число, полученное в результате применения операции `bitxor` над значениями всех кучек называется XOR-суммой игры.

**Theorem (Об оценке позиции в ним)**

*Позиция, для которой XOR-сумма равна нулю проигрышная, остальные — выигрышные.*

**Lemma**

*Все ходы из позиции с нулевой XOR-суммой приводят к ненулевой XOR-сумме.*

**Lemma**

*Существует ходы из позиции с ненулевой XOR-суммой, приводящий к нулевой XOR-сумме.*

# Теорема Шпрага-Гранди

**Theorem (Шпрага-Гранди)**

*Любая конечная равноправная игра с полной информацией, выигрыш в которой определяется переходом в заключительную позицию, а ничья невозможна, эквивалентна игре в ним.*