Разработка и анализ алгоритмов

Лекция 5
Поиск. Жадные алгоритмы.

Сергей Леонидович Бабичев

Абстракция *хранилище*.

Абстракция *хранилище*

- Хранилище содержит *ключи* и *значения*.
- Помимо операций создания и уничтожения хранилища реализуются операции:
    - `create` — создать новую пару;
    - `read` — найти пару по ключу;
    - `update` — изменить значение по ключу;
    - `delete` — удалить пару по ключу.

Структуры данных, реализующие эту абстракцию называются `CRUD`-структурами.

Задача поиска. Абстракция поиска.

Задача поиска. Абстракция поиска

Информация нужна для того, чтобы ей пользоваться.

Расширенная задача поиска:

1. Накопление информации (сбор)
2. Организация информации (переупорядочивание, сортировка)
3. Извлечение информации (собственно поиск)

Расширенная задача поиска

- Задача: построение эффективного хранилища данных.
- Требования:
  - Поддержка больших объёмов информации.
  - Возможность быстро находить данные.
  - Возможность быстро модифицировать данные.
- Реализация абстракций:
  - ***Create***
  - ***Read***
  - ***Update***
  - ***Delete***

Задача поиска. Абстракция поиска

- Имеется множество ключей
$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$
- Требуется определить индекс ключа, совпадающего с заданным значением key, `find` — основа для `Read/Update/Delete`.

```
bunch a;
index = find(a, key);
```

$bunch$ — абстрактное хранилище элементов, содержащих ключи (массив, множество, дерево, список...).

Хорошая организация хранилища входит в расширенную задачу поиска.

Последовательный поиск.

Последовательный поиск

Ситуация: к поиску не готовились, ключи не упорядочены.

Индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ключ	132	612	232	890	161	222	123	861	120	330
Данные	АВ	СА	ЯФ	АВ	АА	НД	ОР	ОС	ЗЛ	УГ

`find(a, 222) = 5`

`find(a, 999) = 10` (элемент за границей поиска).

Последовательный поиск

```
int dummysearch(int *a, int N, int key) {
   for (int i = 0; i < N; i++) {
       if (a[i] == key) {
          return i;
       }
    }
  return N;
}
```

Вероятность найти ключ в $i-$м элементе $P_i = \frac{1}{N}$

Матожидание числа поисков $E = \frac{N}{2}$

Число операций сравнения в худшем случае $2N$.

$$T(N) = 2 \cdot N = O(N)$$

Последовательный поиск

Небольшая подготовка:

Индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ключ	132	612	232	890	161	222	123	861	120	330	999
Данные	АВ	СА	ЯФ	АВ	АА	НД	ОР	ОС	ЗЛ	УГ	??

Результаты не изменились.

`find(a, 222) = 5`

`find(a, 999) = 10` (элемент за границей поиска).

Последовательный поиск

```
int cleversearch(int *a, int N, int key) {
   // Required: capacity of a >= N+1
   a[n] = key;
   int i;
   for (i = 0; a[i] != key; i++)
       ;
   return i;
}
```

Число операций сравнения N в худшем случае.

$$T(N) = N = O(N)$$

Поиск ускорен в два раза!
Без подготовки лучших результатов не добиться.

Неупорядоченный массив

- Сложность операций:
  - ***Create*** — $O(1)$
  - ***Read*** — $O(N)$
  - ***Update*** — $O(N)$
  - ***Delete*** — $O(N)$

Поиск с сужением зоны.

Поиск с сужением зоны

Если в зоне поиска имеется упорядочивание — всё становится значительно лучше. Возможное действие: упорядочить по отношению.

- Имеется множество ключей

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

- Требуется определить индекс ключа, совпадающего с заданным значением key.

Поиск с сужением зоны

Принцип «разделяй и властвуй».

1. Искомый элемент равен центральному? Да — нашли.
2. Искомый элемент меньше центрального? Да — рекурсивный поиск в левой половине.
3. Искомый элемент больше центрального? Да — рекурсивный поиск в правой половине.

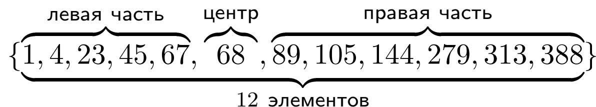
Поиск с сужением зоны

- Вход алгоритма: упорядоченный по возрастанию массив, левая граница поиска, правая граница поиска.
- Выход алгоритма: номер найденного элемента или -1.

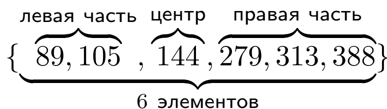
```
int binarySearch(int val, int a[], int left, int right) {
   if (left >= right) return a[left] == val? left : -1;
   int mid = (left+right)/2;
   if (a[mid] == val) return mid;
   if (a[mid] > val) {
      return binarySearch(val, a, left, mid-1);
   }  else {
      return binarySearch(val, a, mid+1, right);
   }
}
```

Поиск с сужением зоны

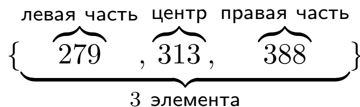
Оценка глубины рекурсии.
Поиск ключа 313:



$313 > 68 \rightarrow$ ключ справа



$313 > 144 \rightarrow$ ключ справа



$313 = 313 \rightarrow$ ключ найден

Поиск с сужением зоны

Попрактикуемся в мастер-теореме для вывода и так очевидного разультата.

- Количество подзадач $a = 1$.
- Каждая подзадача уменьшается в $b = 2$ раза.
- Сложность консолидации $O(1) = O(N^0) \to d = 0$

$d = \log_b a \to T(N) = \log N$

Поиск с сужением зоны

Переход от рекурсии к итерации.

```
int binarySearch(int val, int a[], int left, int right) {
   while (left < right) {
      int mid = (left + right)/2;
      if (a[mid] == val) return mid;
      if (a[mid] > val) {
         right = mid - 1;
      }  else {
         left =  mid + 1;
      }
   }
   return a[left] == val? left : -1;
}
```

Распределяющий поиск. Поиск с использованием свойств ключа.

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без предварительной подготовки и вспомогательных данных — нет.

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без предварительной подготовки и вспомогательных данных — нет.
- Нужно найти M раз значение в неотсортированном массиве размером N. Какова сложность алгоритма?

Распределяющий поиск

- Можно ли найти ключ в неотсортированном массиве быстрее, чем за $O(N)$?
- Без предварительной подготовки и вспомогательных данных — нет.
- Нужно найти M раз значение в неотсортированном массиве размером N. Какова сложность алгоритма?
- Вариант ответа: если $M > \log N$, то предварительной сортировкой. Сложность составит $O(N \log N) + M \cdot O(\log N) = O(N \log N)$.
- Можно и быстрее.

Распределяющий поиск

- Если $|D(Key)|$ невелико, то имеется способ, похожий на сортировку подсчётом.
- Создаётся **инвертированный массив.**

$a = \{2, 7, 5, 3, 8, 6, 3, 9, 12\}$. $|D(a)| = 12 - 2 + 1 = 11$.
$a_{inv}[2..12] = \{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
$a[0] = 2 \rightarrow a_{inv}[2] = 0$
$a[1] = 7 \rightarrow a_{inv}[7] = 1$
$a[2] = 5 \rightarrow a_{inv}[5] = 2$
$a_{inv}[2..12] = \{0, 6, -1, -1, 5, -1, 4, 7, -1, -1, 8\}$

Распределяющий поиск

index	0	1	2	3	4	5	6	7	8
key	2	7	5	3	8	6	3	9	12

key	2	7	5	3	8	6	3	9	12
index	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Распределяющий поиск

Два этапа. Первый этап — инвертирование.

```
int * prepare(int *a, int N, int *min, int *max) {
   *min = *max = a[0];
   for (int i = 1; i < N; i++) {
      if (a[i] > *max) *max = a[i];
      if (a[i] < *min) *min = a[i];
   }
   if (*max - *min > THRESHOLD) return NULL;
   int *ret = malloc(sizeof(int)*(*max - *min + 1));
   for (int i = *min; i <= *max; i++) {
      ret[i] = -1;
   }
   for (int i = 0; i < N; i++) {
      ret[a[i] - *min] = i;
   }
   return ret;
}
```

Распределяющий поиск

Второй этап: поиск.

```
// Preparation
int min, max;
int *ainv = prepare(a, N, &min, &max);
// Where is the key?
result = -1; // Not found value
if (key >= min && key <= max) result = ainv[key - min];
...
free(ainv);
```

- $O(N)$ на подготовку.
- $O(M)$ на поиск M элементов.
- $T(N, M) = O(N) + O(M) = O(N)$

Распределяющий поиск

- Сложность операций после подготовки:
  - ***Create*** — $O(1)$
  - ***Read*** — $O(1)$
  - ***Update*** — $O(1)$
  - ***Delete*** — $O(1)$
- Жёсткие ограничения на множество ключей.
- Сложность по памяти — $O(N) + O(|E|)$
- Запрет на повторяющиеся ключи.
- При наличии $f(key)$ сводится к хеш-поиску.

Жадные алгоритмы

Задача о резервных копиях

Задача 1. Имеется распределённая система, состоящая из N хранилищ различной ёмкости, причём в i-м хранилище можно разместить A_i блоков информации.
Хранение одного блока считается надёжным, если имеется две его копии в различных хранилищах. Требуется определить наибольшее количество надёжных блоков, которое можно разместить во всех хранилищах.

Задача о резервных копиях: пример

4 хранилища размерами (8, 7, 4, 3).

8	7	4	3
1	1	2	2
3	3	4	4
5	5	6	6
7	7	-	-
8	8	-	-
9	9	-	-
10	10	-	-
11	-	11 -	-

Задача о резервных копиях

Сведём задачу к эквивалентной: имеется $\mathbb{N}$ кучек камней, каждым ходом можно выбрать по одинаковому количеству камней из любой пары кучек. Найти такой порядок игры, при котором останется минимальное количество камней.

- Это же ним-задача!
- Но мы не знаем игру Шпрага-Гранди и попробуем решить жадным алгоритмом.
- Будем считать позицию P_1 более простой, чем позиция P_2, если позиция P_2 может возникнуть после конечного количества ходов из позиции P_1.
- Назовём *стратегией* детерминированное действие, зависящее от позиции, и приводящее к более простой позиции.
- Например, стратегией является «выбрать две наибольшие кучи и взять оттуда максимально возможное количество камней».
- Задачу можно решать многими стратегиями.
- Какая из стратегий оптимальная?

Решение жадным алгоритмом

- Применение выбранной стратегии на каждом шаге создаёт более простую позицию.
- Стратегия в новой позиции не меняется.
- Такая стратегия есть *локально-оптимальный* алгоритм.
- Применение выбранного локально-оптимального алгоритма на протяжении решения всей задачи есть *жадный алгоритм*.

Задача о резервных копиях: стратегия 1

Первая стратегия: выбрать две наименьших кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
8	7	1	0
8	6	0	0
2	0	0	0

Решение неверное.

Задача о резервных копиях: стратегия 2

Вторая стратегия: выбрать наибольшую и наименьшую кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
5	7	4	0
5	3	0	0
2	0	0	0

Опять не повезло.

Задача о резервных копиях: стратегия 3

Третья стратегия: выбрать две наибольших кучи и взять из них одинаковое наибольшее количество камней.

8	7	4	3
1	0	4	3
1	0	1	0
0	0	0	0

Повезло. Как обычно в задачах на жадность: нужен контрпример, *зелёная ворона*.

Задача о резервных копиях: стратегия 3

Новая попытка:

8	7	7	6	5
1	0	7	6	5
1	0	1	0	5
0	0	1	0	4
0	0	0	0	3

И снова неудача. Есть ли вообще нужная стратегия?

Задача о резервных копиях: стратегия 4

Четвёртая стратегия: выбрать наибольшую и наименьшую кучи, и взять из них по одному камню.

8	7	4	3
7	7	4	2
7	6	4	1
6	6	4	0
5	6	3	0
5	5	2	0
4	5	1	0
4	4	0	0
0	0	0	0

Задача о резервных копиях: стратегия 4

8	7	7	6	5
7	7	7	6	4
7	7	6	6	3
7	6	6	6	2
6	6	6	6	1
6	6	6	5	0
6	6	5	4	0
6	5	5	3	0
5	5	5	2	0
5	5	4	1	0
5	4	4	0	0
4	4	3	0	0
4	3	2	0	0
3	3	1	0	0
3	2	0	0	0
1	0	0	0	0

Задача о резервных копиях: корректность алгоритма

- Очевидно, что на каждой «большой» итерации наименьшая из куч опустошается, так как из неё по условиям алгоритма всегда производится взятие.
- Когда останется три кучи $A \geqslant B \geqslant C$, то возможны следующие ситуации:
  - $A > B + C$. Тогда ответ: $A - B - C$. Так как на каждом ходе A оставалось наибольшим, на каждом их ходов, приведшем к позиции происходило вычитание из A, это значит, что $A > \sum$ всех оставшихся, что даёт верное решение.
  - $A = B + C$. Тогда результат равен нулю.
  - $A < B + C$. Тогда, после некоторой, возможно нулевой последовательности ходов достигается ситуация, когда $A' = B' > C'$, которая сведётся к позиции $A' - \left\lfloor \frac{C'}{2} \right\rfloor, A' - \left\lceil \frac{C'}{2} \right\rceil$.

Задача о распределении работ

Задача 2. Имеется список работ. Каждая работа выполняется ровно один день, должна быть выполнена строго до заданного времени и приносит заданное количество прибыли.

Номер	Дедлайн	Прибыль
1	5	19
2	2	16
3	3	33
4	1	20
5	3	45
6	2	70

Как решать такую задачу?

Задача о распределении работ

- Предлагается следующий вариант:
  1. Выбирается самый большой по прибыли элемент.
  2. Он добавляется в очередь.
  3. Если всё ещё имеются заказы — идём к шагу (1).
  4. В полученной очереди берём первый элемент очереди.
  5. Если на этот день или любой из ранних дней работа не запланирована — планируем на самый поздний день, иначе — пропускаем.
  6. Если в очереди остались элементы, идём к 4.
  7. Конец алгоритма.

Задача о распределении работ

- Это — опять жадный алгоритм.
- На каждом шаге принимается локально-оптимальное решение.
- Мы должны иметь *безопасный шаг* выбора очередного элемента.
- После каждого шага *структура задачи* остаётся подобной предыдущей.
- Если очередной шаг остаётся безопасным, задача решается.
- Стратегии в задаче о резервных копиях есть попытки выбора безопасных шагов.

Задача о банкомате

Задача 3. В банкомате имеется неограниченное количество купюр номиналами $a_1, a_2, \ldots$. Нужно выдать точную сумму x наименьшим количеством банкнот.

- Имеется жадный алгоритм.

1. Очередной шаг: выдаём наибольшую из возможных купюр.
2. Если выдать не удалось, то конец алгоритма с неуспехом.
3. Если полная сумма выдана, то конец алгоритма с успехом.
4. Идём к шагу 1.

- Пусть имеются купюры номиналом $\{10, 6, 1\}$.
- Оптимальное решение для 12: $12 = 6 + 6$. Алгоритм даст $12 = 10 + 1 + 1$.
- Для набора $\{10, 5, 3, 1\}$ алгоритм всегда будет давать точное решение.

Почему какие-то задачи допускают точное жадное решение, а какие-то — нет?

- Не имеют жадного решения: $\{10, 6, 1\}, \{10, 7, 2, 1\}, \{4, 3, 1\}$.
- Имеют жадное решение: $\{10, 5, 3, 1\}, \{4, 2, 1\}$.
- Гипотезы?

- Не имеют жадного решения: $\{10, 6, 1\}, \{10, 7, 2, 1\}, \{4, 3, 1\}$.
- Имеют жадное решение: $\{10, 5, 3, 1\}, \{4, 2, 1\}$.
- Гипотезы?
- Не имеют жадного решения: $\{9, 4, 1\}, \{25, 15, 1\}$.
- Имеют жадное решение: $\{9, 5, 1\}, \{25, 15, 10, 5, 1\}$.
- Гипотезы?

Алгоритм: как найти алгоритм?

- Начинаем с первого и, если он подходит, отлично.

1. Наивное решение.
2. Жадный алгоритм.
3. Разделяй и властвуй. Рекурсия.
4. Динамическое программирование.
5. Что-то специфическое.

Жадные алгоритмы, которые нам предстоят: алгоритмы Хаффмена, Куна, Прима, Краскала, Дейкстры, Форда-Фалкерсона, Эдмондса-Карпа, Z- и префикс-функции, Ахо-Корасик, Укконена, ...

Для многих придётся использовать готовые или строить новые структуры данных. Но они остаются жадными.

Все жадные алгоритмы допускают математическое представление в виде *матроида*.

Матроиды

Матроиды

Definition (Матроид)

Матроид $\mathbb{I}$ есть система множеств, обладающая свойствами:

1. Пустое множество принадлежит I.
2. Если какое-то множество S принадлежит $\mathbb{I}$, то все его подмножества принадлежат $\mathbb{I}$.
3. Если для множеств S_1 и S_2 $|S_1| > |S_2|$, то существует такой элемент $e \in S_1$, что $S_2 \cup \{e\} \in I$.

3'. Вариант формулировки: то существует такой элемент $e \in S_1 - S_2$, что $S_2 \cup \{e\} \in I$.

Definition (Носитель матроида)

Все множества, входящие в матроид, состоят из элементов *носителя* матроида.

Definition (База матроида)

База матроида $\mathbb{I}$ — максимальное по включению множество, входящее в матроид $\mathbb{I}$

Матроиды и графы

- Матроид $\mathbb{I}$ представляет граф $G = (V, E)$, если:

1. множество носителей есть множество рёбер E.
2. Если $E_1 \subset E$, то $A \in \mathbb{I}$ тогда и только тогда, когда E_1 — ациклическое.

Алгоритм Радо-Эдмондса

- Пусть имеется матроид $\mathbb{I}$ с носителем X.
- Пусть каждому элементу $x_i \in X$ сопоставлен вес w_i.
- Пусть вес подмножества есть сумма весов элементов.
- Тогда алгоритм Радо-Эдмондса находит в $\mathbb{I}$ *базу минимального веса*, выбирая на каждом шаге элемент с наименьшим весом.
- $A_0 = \emptyset$
- $A_i = A_{i-1} + \{x\}$, где $x = \min_{w_j}(y_i \in X - A_{i-1} : A_{i-1} + \{y_j\} \in I)$.

Решение задачи о распределении работ

- Назовём множество работ *выполнимым*, если все работы можно выполнить без просрочки.
- Система выполнимых множеств является матроидом так как выполняются пункты:

1. Пустое выполнимое множество существует.
2. Любое подмножество выполнимого подмножества принадлежит $\mathbb{I}$.
3. Если существуют выполнимые множества S_1 и S_2 такие, что $|S_1| > |S_2|$, то, действительно, если элемент e, который принадлежит S_1 добавить в S_2, то итоговое множество будет принадлежать $\mathbb{I}$.

Алгоритм Хаффмена.

Сжатие информации: алгоритм Хаффмана

Задача 4. Имеется текст, состоящий из символов. Закодировать его таким образом, чтобы:

- каждый из встречающихся символов получил свой двоичный код
- множество кодов было префиксным
- суммарная длина всех кодов для всех символов была бы минимальной.

Алгоритм Хаффмана

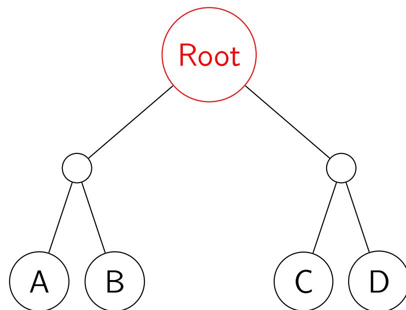
- Пусть имеется текст, состоящий из множества из четырёх символов: `AAAABAABABABABCBCAAAD`
- Его длина — 21 символ.
- Один из возможных кодов:
  - `A` $\to$ `00`
  - `B` $\to$ `01`
  - `C` $\to$ `10`
  - `D` $\to$ `11`
- Всего 42 бита на кодирование текста.

Префиксный код

- Неформальное определение: код, в котором не имеется кодовых слов, начинающихся с других кодовых слов.
- Не префиксный код:
  - $\mathtt{A} \rightarrow 00$
  - $\mathtt{B} \rightarrow 10$
  - $\mathtt{C} \rightarrow 01$
  - $\mathtt{D} \rightarrow 101$
- Ещё одно название — код, удовлетворяющий *условиям Фано*.
- Наша задача — найти *минимальный префиксный код* для множества.

Кодирование с помощью дерева

- A → 00
- B → 01
- C → 10
- D → 11



Алгоритм Хаффмана

- AAAABAABABABABCBCAAAD
- Определим частоты символов:
  - $F_A = 12$
  - $F_B = 6$
  - $F_C = 2$
  - $F_D = 1$
- Нужно построить дерево, вес которого минимален.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot L_i \to \min,$$

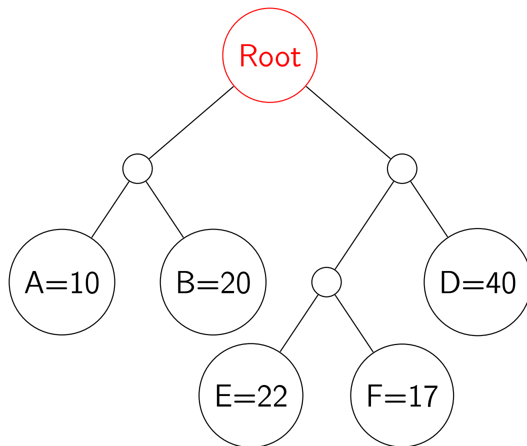
где L_i - глубина $i-$го символа.

Алгоритм Хаффмана

Свойства оптимального дерева:

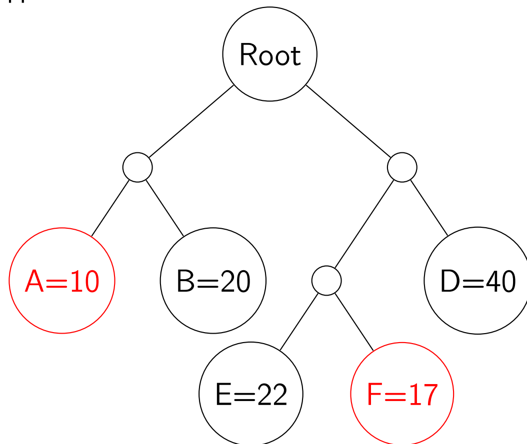
- Из каждого узла должно исходить ровно два пути.
- Не должно быть пустых вершин.
- Самое длинное кодовое слово должно быть парным.

Алгоритм Хаффмана



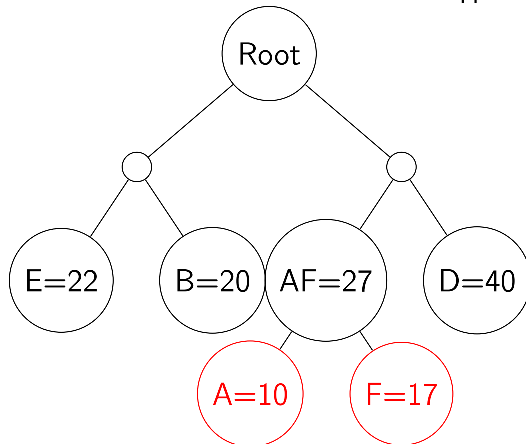
Алгоритм Хаффмана

Находим два самых редких символа.



Алгоритм Хаффмана

Два самых редких символа должны находиться на самой длинной ветке. Если нет, то можно их поменять местами с символами на самой длинной ветке.

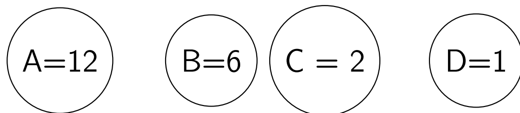


Алгоритм Хаффмана

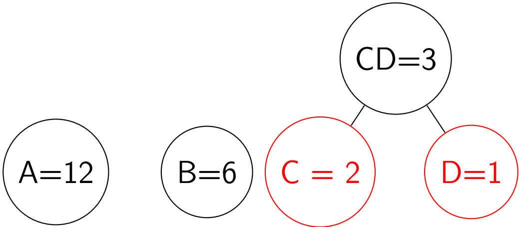
Жадный алгоритм:

1. Помещаем в каждый узел частоту символа
2. Располагаем узлы согласно убыванию частот.
3. Для двух узлов с наименьшей частотой добавляем узел, который их соединяет.
4. В узел помещаем сумму частот детей
5. Помечаем узлы или вершины, как уже обработанные (отправляем вниз)
6. Если необработанных не осталось, то конец алгоритма
7. Переходим к шагу 2.

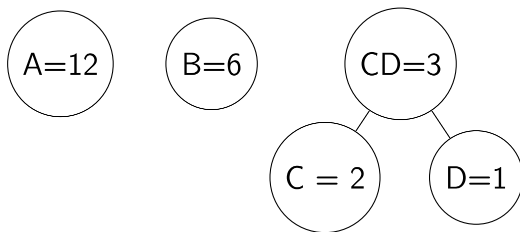
После шага 1



Шаги 2,3,4

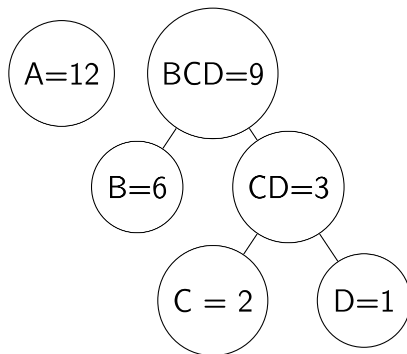


Шаг 5



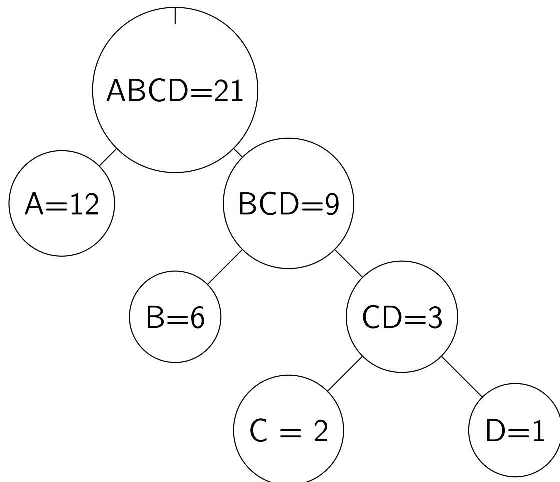
Алгоритм Хаффмана

Следующая итерация:



Алгоритм Хаффмана

Заключительное состояние:



Алгоритм Хаффмана

Получившиеся коды:

- $A \to 0$
- $B \to 10$
- $C \to 110$
- $D \to 111$

Общая длина всех кодовых слов $12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 33 < 42$