# Разработка и анализ алгоритмов

## Лекция 6
## Кучи

Сергей Леонидович Бабичев

# Приоритетная очередь

- В алгоритма Хаффмена из прошлой лекции требовалось:

1. В некотором множестве значений найти два минимальных элемента.
2. Удалить эти элементы из множества.
3. Сложить их значения и снова добавить в множество.
4. Проделывать эту операцию до тех пор, пока в множестве не останется ровно один элемент.

- Наивная реализация алгоритма: массив.
- Сложность формирования множества тогда $O(N \log N)$.
- Сложность поиска наименьшего $O(1)$.
- Сложность удаления наименьшего $O(1)$.
- Сложность добавления $O(N)$.
- Введём абстракцию *приоритетная очередь* для таких запросов.

# Абстракция *приоритетная очередь*

# Приоритетная очередь

- Приоритетная очередь (`priority queue`) — структура данных, элементы которой сравнимы и имеют приоритет.
- Первым извлекается наиболее приоритетный элемент (максимум или минимум) (*голова очереди*).
- Любая операция вставки оставляет неизменным инвариант: в голове очереди всегда находится самый приоритетный элемент.

# Интерфейс абстракции *приоритетная очередь*

- $insert(q, x)$ — добавление элемента `x` в очередь;
- $x = getMin(q)$ — получает самый приоритетный элемент.
- $extractMin(q)$ — извлекает самый приоритетный элемент и удаляет его;
- $decreaseKey(q, p, d)$ — сделать элемент, идентифицированный как $p$, более приоритетным, уменьшить его приоритет на $d > 0$. Элемент, возможно, станет ближе к голове очереди.
- $size(q)$ — получить количество элементов в очереди.

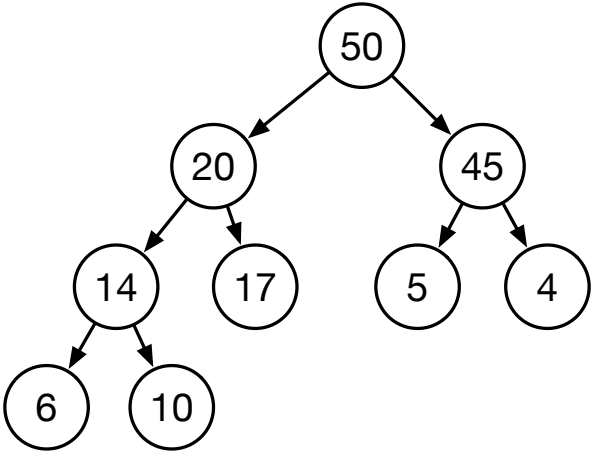
# Бинарная куча

# Бинарная куча

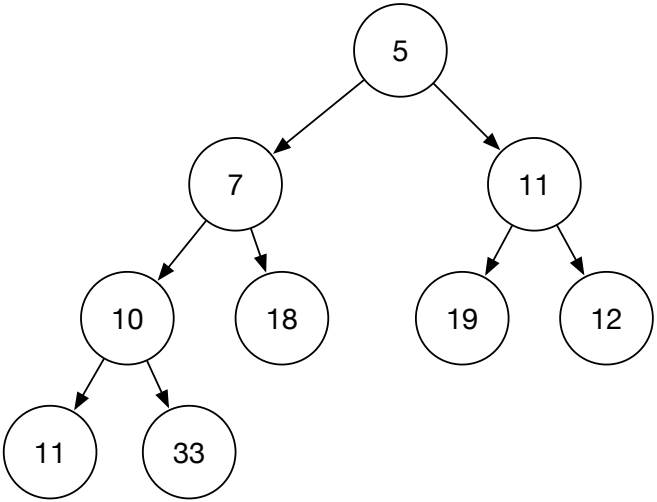
- *Бинарная куча* — бинарное дерево, удовлетворяющее условиям:
  - Для любой вершины её приоритет не меньше приоритета потомков.
  - Дерево является правильным подмножеством полного бинарного — *инвариант по структуре*.

Другое название — пирамида (`heap`).

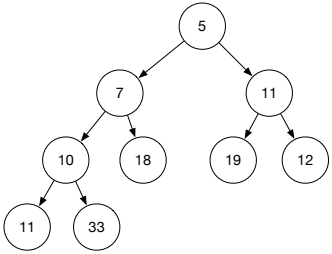
# Приоритетная очередь: невозрастающая пирамида



# Приоритетная очередь: неубывающая пирамида



# Приоритетная очередь:реализация в виде массива




Хранение в виде массива с индексами от 1 до $N$:

| 5 | 7 | 11 | 10 | 18 | 19 | 12 | 11 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- Индекс корня дерева всегда равен 1 — максимальный (минимальный) элемент
- Индекс родителя узла $i$ равен $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$
- Индекс левого потомка узла $i$ равен $2i$
- Индекс правого потомка узле $i$ равен $2i + 1$
- Инвариант по данным:

$$\forall a_i \begin{cases} a_i \leqslant a_{2i}, \text{ если } 2i \leqslant N; \\ a_i \leqslant a_{2i+1}, \text{ если } 2i + 1 \leqslant N; \end{cases}$$

# Приоритетная очередь: реализация на базе массива.

```
typedef int T;

typedef struct binary_heap_s {
    T       *body;
    size_t   allocated;
    size_t   nodes;
} bh;
```

# Бинарная куча: создание

```
bh* bh_create(size_t maxsize) {
    bh *t = malloc(sizeof(bh));
    t->body = malloc(sizeof(T) * (maxsize+1));
    t->allocated = maxsize;
    t->nodes = 0;
    return t;
}

void bh_destroy(bh *t) {
    free(t->body); free(t);
}

void bh_swap(bh *t, int a, int b) {
    T tmp = t->body[a]; t->body[b] = t->body[a]; t->body[a] = tmp;
}
```

$$T_{create} = O(N)$$

# Бинарная куча: поиск минимума

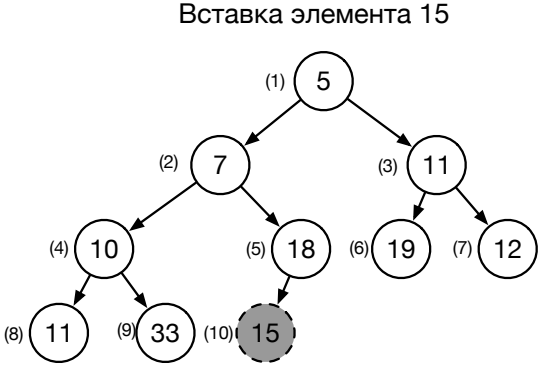
- Соблюдается инвариант по данным.
- Операция $\leqslant$ транзитивна.
- Самый приоритетный элемент — в вершине кучи.

```
T bh_getMin(bh *t)
    assert(t->nodes > 0);
    return t->body[1];
}
```

$$T_{fetchMin} = O(1)$$

# Бинарная куча: вставка элемента

- Этап 1. Вставка в конец кучи.




Отлично! *Структура* кучи не испортилась!

| 5 | 7 | 11 | 10 | 18 | 19 | 12 | 11 | 33 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

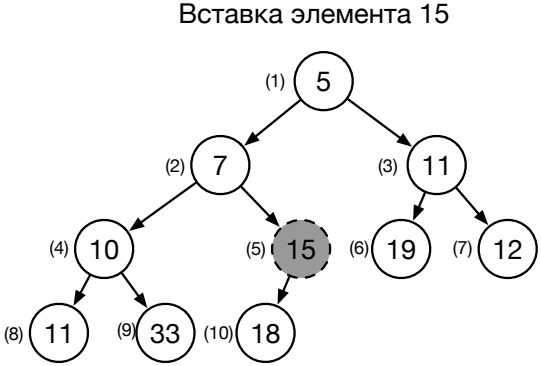
# Бинарная куча: подъём элемента

- Требуется, не меняя структурного инварианта, добиться инварианта по данным.
- Если для элемента не выполняется инвариант по данным — два случая.

1. Элемент находится ниже допустимого — поднимаем его ($siftUp$).
2. Элемент находится выше допустимого — опускаем его ($siftDown$).

# Бинарная куча: вставка элемента: $siftUp$

- Этап 2. Корректировка значений.

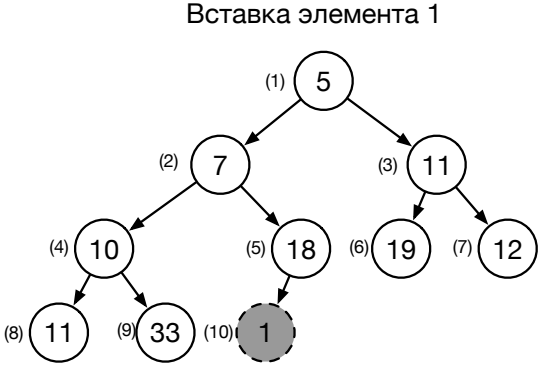



Куча удовлетворяет всем условиям.

| 5 | 7 | 11 | 10 | 15 | 19 | 12 | 11 | 33 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Бинарная куча: вставка элемента: $siftUp$

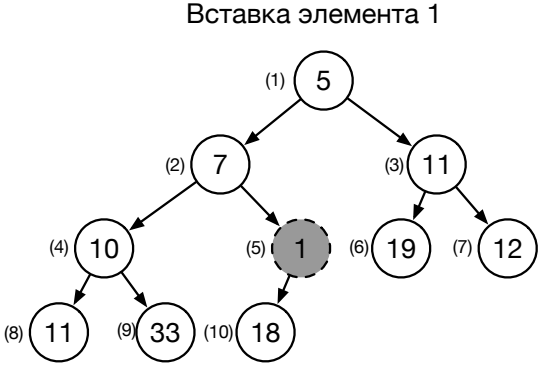
- Попытаемся вставить минимальный элемент.




| 5 | 7 | 11 | 10 | 18 | 19 | 12 | 11 | 33 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Бинарная куча: вставка элемента: $siftUp$

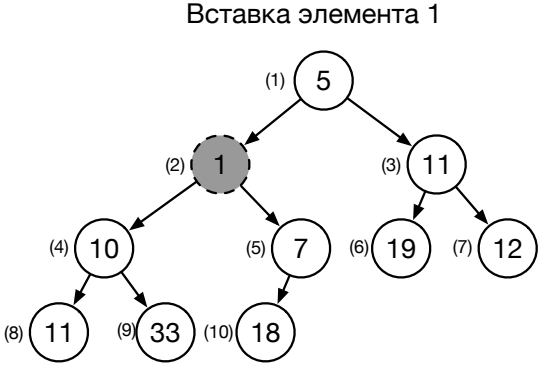
- Минимальный элемент ползёт вверх по дереву.




| 5 | 7 | 11 | 10 | 1 | 19 | 12 | 11 | 33 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Бинарная куча: вставка элемента: $siftUp$

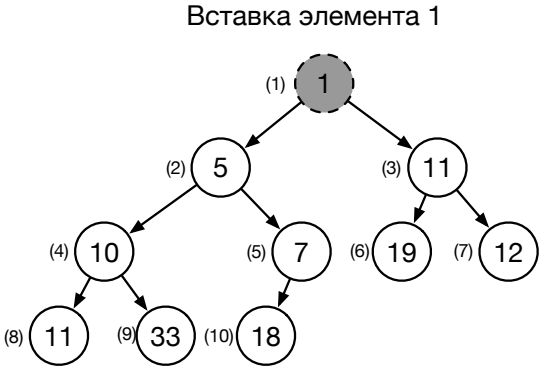
- Минимальный элемент ползёт вверх по дереву.




| 5 | 1 | 11 | 10 | 7 | 19 | 12 | 11 | 33 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Бинарная куча: вставка элемента

- Минимальный элемент ползёт вверх по дереву.




| 1 | 5 | 11 | 10 | 7 | 19 | 12 | 11 | 33 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

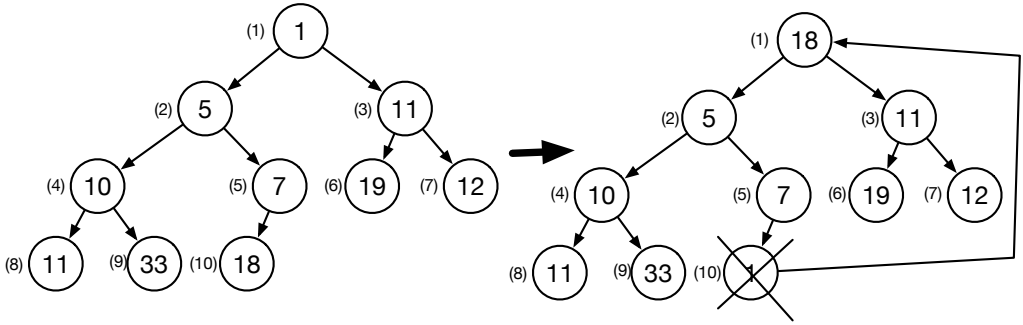
# Бинарная куча: вставка элемента: реализация $siftUp$

```
void bh_siftUp(bh *t, size_t index) {
  for (size_t i = index;
   i > 1 && t->body[i] < t->body[i/2];
   i /= 2) {
    bh_swap(t, i, i/2);
  }
}

void bh_insert(bh *t, T node) {
  assert(nodes < allocated);
  t->body[++nodes] = node;
  bh_siftUp(nodes);
}
```

$$T_{Insert} = O(\log N)$$

# Бинарная куча: удаление максимального (минимального)




Свойства кучи нарушены. Требуется восстановление.

# Бинарная куча: восстановление свойств

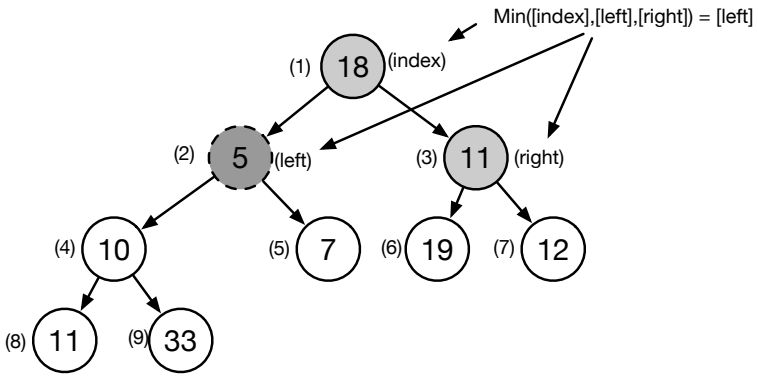
- Для восстановления свойств применяем функцию $siftDown$.

```
void bh_siftDown(bh *t, size_t index) {
  for (;;) {
    size_t left = index + index, right = left + 1;
    // Who is greater, [index], [left], [right]?
    size_t smallest = index;
    if (left <= t->nodes && t->body[left] < t->body[index])
      smallest = left;
    if (right <= t->nodes && t->body[right] < t->body[smallest])
      smallest = right;
    if (smallest == index) break;
    bh_swap(t, index, smallest);
    index = smallest;
  }
}
```

$$T_{siftDown} = O(\log N)$$

# Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (1)

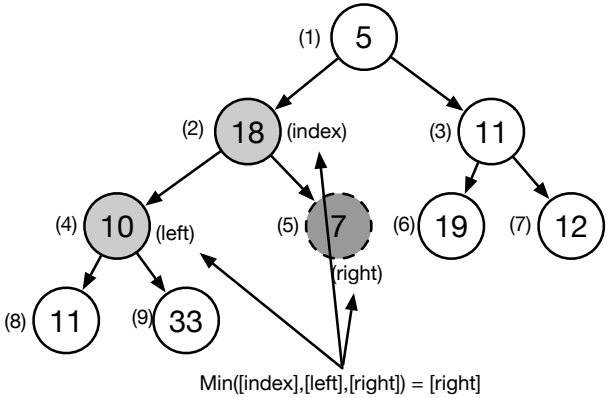



| 18 | 5 | 11 | 10 | 7 | 19 | 12 | 11 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Новый индекс для восстановления (2)

# Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (2)

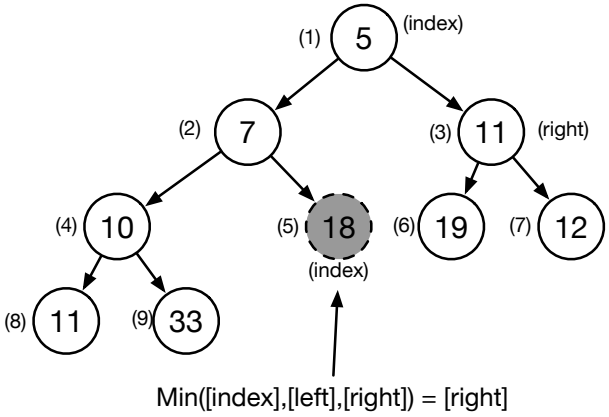



| 50 | 14 | 20 | 17 | 45 | 10 | 6 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Новый индекс для восстановления (5)

# Бинарная куча: восстановление свойств

- Восстановление индекса (5)




| 5 | 18 | 11 | 10 | 7 | 19 | 12 | 11 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Восстановление закончено.

# Лемма

## Lemma (об операциях $siftUp$ и $siftDown$)

*Пусть имеется корректная куча, представленная $a_i, i = 1 \dots N$. Пусть пришёл запрос об изменении элемента $a_k$ на значение $a'_k$. Тогда:*

1) *если $a'_k < a_k$, то $siftUp(k)$ восстановит свойства кучи;*
2) *если $a'_k > a_k$, то $siftDown(k)$ восстановит свойства кучи.*

## Доказательство.

1) Индукция по $k$. База: $k = 1$.
Индуктивный переход. $k > 1$. Алгоритм сравнивает $a'_k$ с $a_{k/2}$. При $a'_k \geqslant a_{k/2}$ куча остаётся корректной, а алгоритм ничего не исполняет. При $a'_k < a_{k/2}$ операция $swap$ приводит к уменьшению значения в вершине $a_{k/2}$ и инвариант сохраняется.

□

# Лемма об операциях $siftUp$ и $siftDown$

**Доказательство.**

2) Индукция по $k$. База: $a_k$ — лист.
Индуктивный переход. $a_k$ — не лист. Тогда существует $a_{2k}$, и, возможно, парный элемент $a_{2k+1}$. Пусть $a_m = \min(a_{2k}, a_{2k+1})$.
При $a'_k \leqslant a_m$ куча остаётся корректной, а алгоритм ничего не исполняет. При $a'_k > a_m$ операция $swap$ приводит к увеличению значения в вершине $a_m$ и уменьшению в вершине $a_k$. □

# Операция $decreasyKey$

- Доказанная лемма даёт реализацию:

```
void bh_decreaseKey(bh *t, size_t k, T delta) {
    assert(k < t->nodes);
    assert(delta > 0);
    t->body[k] -= delta;
    pq_siftUp(t, k);
}
```

# Бинарная куча: сложность операций

- **insert** — $O(\log N)$
- **extractMin** — $O(\log N)$
- **getMin** — $O(1)$
- **decreaseKey** — $O(\log N)$

# HeapSort

# HeapSort

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки со сложностью $O(N \log N)$ в *худшем* случае.
- Как?
- Является ли отсортированным массив, являющийся представлением бинарной кучи?

# HeapSort

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки со сложностью $O(N \log N)$ в *худшем* случае.
- Как?
- Является ли отсортированным массив, являющийся представлением бинарной кучи?
- Нет.
- Кто виноват? Что делать?

# HeapSort

- Можно скомбинировать методы бинарной кучи.
  1. Создать бинарную кучу.
  2. Вставить в неё элементы массива
  3. Извлекать из неё максимальный (минимальный) элемент с удалением.

# HeapSort

- Примерный код наивной сортировки HeapSort

```
void heapsort(int v[], size_t vsize) {
  bh *h = binary_heap_create(vsize);
  for (size_t i = 0; i < vsize; i++) {
    h->insert(v[i]);
  }
  for (size_t i = 0; i < vsize; i++) {
    v[i] = h->extractMin();
  }
  binary_heap_destroy(h);
}
```

# HeapSort

- Сложность алгоритма:
  1. Создание бинарной кучи — $T_1 = O(1)$.
  2. Вставка $N$ элементов — $T_2 = O(N \log N)$.
  3. Извлечение удалением $N$ элементов — $T_3 = O(N \log N)$.

$$T_{heapsort} = O(1) + O(N \log N) + O(N \log N) = O(N \log N)$$

# HeapSort

- Реализация не особенно хороша: требуется $O(N)$ добавочной памяти на бинарную кучу.
- Небольшая хитрость — и добавочной памяти можно избежать.

# HeapSort

Модифицируем siftDown, построив функцию `heapify`, создающую кучу с максимумом в корне в заданном массиве. `size` — размер кучи.

```
void heapify(T v[], size_t idx, size_t size)
{
  size_t curr = v[idx];
  size_t index = idx;
  for (;;) {
    size_t left = index + index + 1, right = left + 1;
    if ( left < size && v[left] > curr)
      index = left;
    if ( right < size && v[right] > a[index])
      index = right;
    if (index == idx ) break;
    v[idx] = v[index];
    v[index] = curr;
    idx = index;
  }
}
```

# HeapSort

- Создаём бинарную кучу размером $size$ на месте исходного массива, переставляя его элементы.
- Затем на шаге $i$ мы обмениваем самый приоритетный элемент кучи из позиции 0 с элементом под номером $size - i - 1$.
- Размер кучи при этом уменьшается на единицу, а самый приоритетный элемент занимает теперь положенное ему по рангу место.

```
void sort_heap(T v[], size_t size) {
  for(ssize_t i = size/2-1; i >= 0; i--) {
    heapify(a, i, size);
  }
  while( size > 1 ) {
    size--;
    swap(a[0],a[size]);
    heapify(a, 0, size);
  }
}
```

# HeapSort vs QuickSort

- `HeapSort` гарантирует сложность $O(N \log N)$ даже в худшем случае.
- `QuickSort` такой сложности не гарантирует.
- Почему не забыть о `QuickSort` в пользу `HeapSort`?

# HeapSort vs QuickSort

- `HeapSort` гарантирует сложность $O(N \log N)$ даже в худшем случае.
- `QuickSort` такой сложности не гарантирует.
- Почему не забыть о `QuickSort` в пользу `HeapSort`?

- Причина 1: в быстрой сортировке используется меньшее количество операций обмена с памятью.
- Причина 2: $N$ обращений к последовательным ячейкам памяти исполняются до 10-15 раз быстрее, чем столько же обращений к случайным ячейкам памяти из-за организации кэш-памяти.