Алгоритмы и структуры данных

Лекция 23
Геометрия. Суммы Минковского.

Сергей Леонидович Бабичев

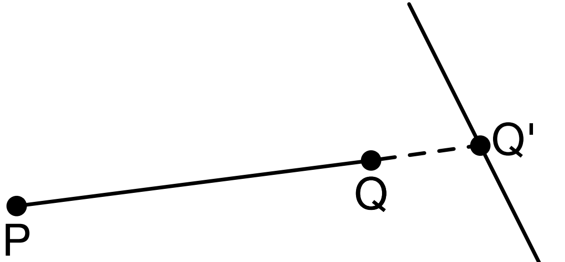
Нахождение диаметра множества точек на плоскости

Задача 1. На плоскости задано множество точек S. Найти его диаметр, то есть такую пару точек $P_i, P_j \in S$, что $|P_i, P_j| \to \max$.

Lemma (О принадлежности точек P_i и P_j)

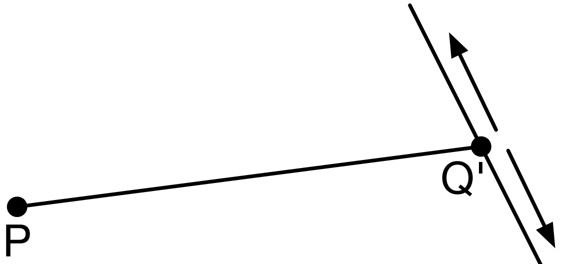
Точки P_i и P_j лежат на выпуклой оболочке $H = \mathrm{conv}(S)$.

Пусть это не так и мы нашли точки P и Q которые не лежат на H и для которых



$|P, Q|$ максимально.
Если точка Q лежит внутри H, тогда продлим отрезок до пересечения с H в точке Q'. $|PQ'| > |PQ|$.
Если Q' совпадает с какой-либо вершиной, то доказано.

Если нет, то продвигаясь по отрезку стороны в сторону, противоположную проекции точки P на сторону, содержащую Q' до вершины, получим отрезок, больший PQ', который больше PQ.

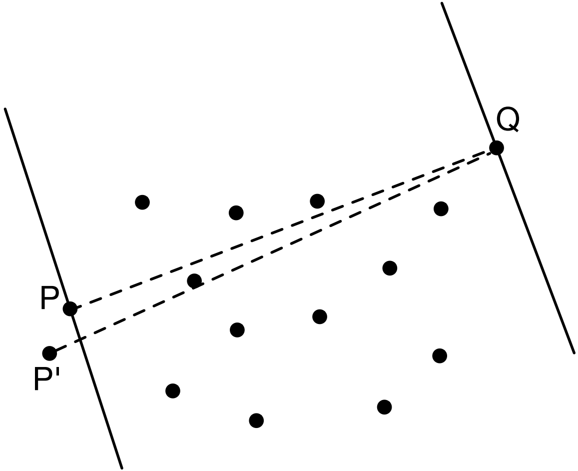


Lemma

Пусть PQ *— диаметр множества* S*, т. е* $dist(P, Q) = \max dist(P', Q'), P', Q' \in S$*. Проведём прямые* L_1 *и* L_2*, перпендикулярные* P *и* Q*, проходящие через* P *и* Q*. Тогда все точки множества* S *принадлежат полосе, образованной прямыми* L_P *и* L_Q *и содержащей отрезок* LQ*.*

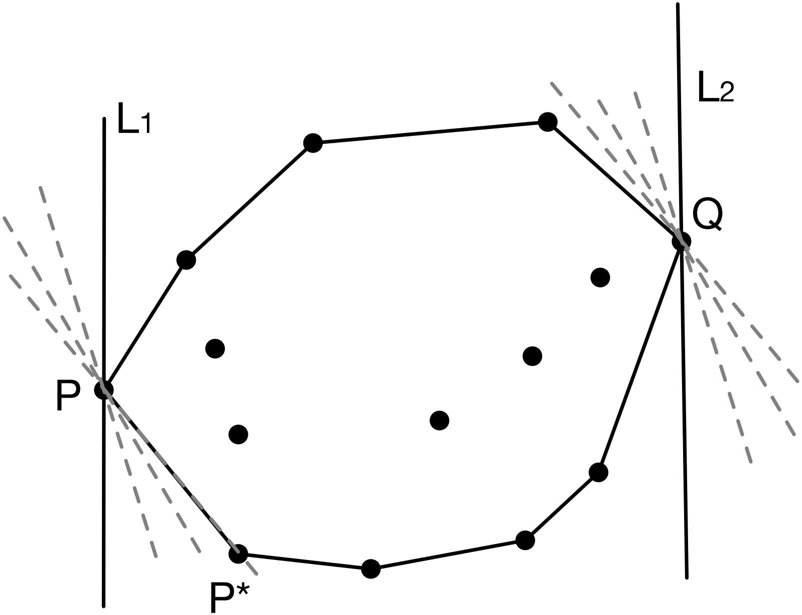
Доказательство.

Доказывается от противного по теореме косинусов — берётся точка P', лежащая вне полосы и расстояние от P' до Q больше $|PQ|$. □


Q
P
P'

Идея нахождения диаметра

- Проведём две параллельные прямые — L_1 и L_2, проходящие через вершины P и Q оболочки H (опорные точки P_1 и P_2 для прямых). Полоса между ними должна захватывать все точки S.
- Начинаем синхронно их вращать против часовой стрелке. Тогда какая-либо из прямой совпадёт со стороной.
- В этом случае в качестве опорной точки выбираем вторую точку совпавшего отрезка (пусть это будет P_2).
- Тогда вращение продолжается в старой точке P_1 и в новой точке P_2.
- Таким образом перебираются все потенциальные пары вершин.
- Ищется максимальное расстояние из всех пар.



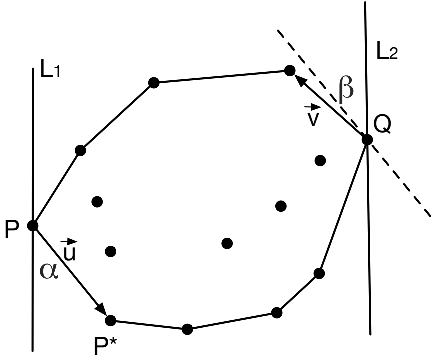
Вращающиеся калиперы

Алгоритм «вращающиеся калиперы»

- Выберем L_1 и L_2 как самую левую и самую правую из всех вертикальных прямых с точками H на них.
- Если на прямых несколько точек, выберем точку с наибольшим y на левой и наименьшим y на правой прямых.
- При синхронном вращении ничего не меняется до тех пор, когда одна из прямых пройдёт по стороне.
- Тогда переключаемся на новую опорную точку на совпавшем отрезке.
- Такое «переключение» происходит $\Theta(N)$ раз.
- Каждая вершина побывает ровно один раз на каждой из прямых в момент переключения.
- При переключении проверяем расстояния между точками-кандидатами.

Технические детали

- Пусть имеется многоугольник M и прямые L_1 и L_2, проходящие через точки P и Q, образующие полосу, содержащую S. Вопрос: когда при вращении впервые изменится опорная точка?

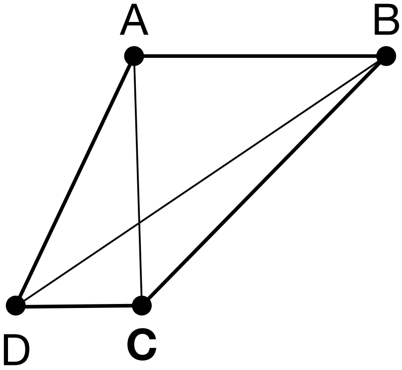


- Событие происходит по меньшему из углов между стороной и прямой.
- Проведём векторы $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$. Сравним векторные произведения.
- Пересечение L_1 происходит раньше L_2, если $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} < 0$.

Технические детали

Lemma (О диагоналях трапеции)

Пусть имеется трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Тогда $\max(|AC|, |BD|) \geqslant \max(|AD|, |BC|)$.

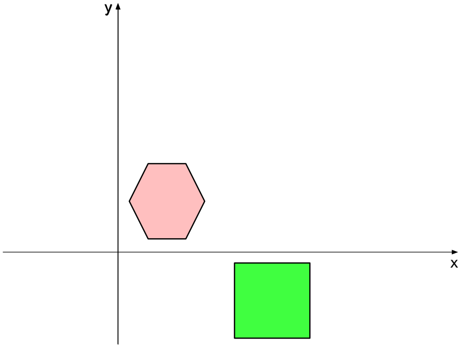


- Поэтому если $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$ то двигаем обе точки, измеряя обе диагонали.

Сумма Минковского.

Definition

Пусть M_1 и M_2 суть фигуры с принадлежащими им внутренними точками в Евклидовом пространстве. Тогда *сумма Минковского* — множество всех точек, образованных всеми попарными суммами из M_1 и M_2.
$M_1 + M_2 = \{P_1 + P_2 : P_1 \in M_1, P_2 \in M_2\}$.



$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \to (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$.

Lemma

Сумма выпуклых многоугольников Если M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, то их сумма $M = M_1 + M_2$ — выпуклый многоугольник.

Доказательство.

а) Свойство выпуклости (если $P, Q \in M \to [P, Q] \in M$).

- Пусть есть $P, Q \in M = M_1 + M_2$. $P = P_1 + P_2, Q = Q_1 + Q_2$.
- $[P_1, Q_1] \subset M_1, [P_2, Q_2] \subset M_2$.
- Введём равномерную непрерывную функцию-индикатор на отрезке: $f(P_1Q_1, 0) = P_1, f(P_1, Q_1, 1) = Q_1$ и $f(P_2Q_2, 0) = P_2, f(P_2, Q_2, 1) = Q_2$. При t, пробегающем от 0 до 1 f пробегает все точки отрезка.
- Для значения $t \in [0..1]$ $f(P_1Q_1, t) = P_1 + f(P_1Q_1, t) = P_1 + P + 2 + t((Q_1 + Q_2) - (P_1 - P_2)) = f((P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2), t)$, что принадлежит $P + Q$ по определению.

$\square$

Сумма выпуклых многоугольников: многоугольник ли?

Доказательство.

b) Докажем, что $M_1 + M_2$ — выпуклый многоугольник $P + Q : P \in M_1, Q \in M_2$, P и Q — вершины многоугольников.

- Необходимость:

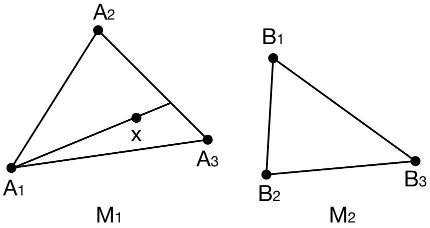
  $$M_1 + M_2 \supset \operatorname{conv}\left(\sum_{i,j} P_i + Q_j\right).$$

  Сумма любых точек лежит в сумме, в том числе и суммы вершин. Так как $M_1 + M_2$ — выпуклое множество, сумма лежит в нём.

$\square$

Сумма выпуклых многоугольников: многоугольник ли?

- Достаточность: $M_1 + M_2 \subset \operatorname{conv}\left(\sum_{i,j} P_i + Q_j\right)$.
- Возьмём произвольную точку $X + Y$ из $M_1 + M_2$, $X \in M_1$, $Y \in M_2$ и какой-то треугольник, в котором они лежат.
- Тогда существует треугольник в вершинах многоугольника такой, чтобы в нём лежала и X и Y. Это по свойствам триангуляции.
- Найдём положение X, что лежит в каком-то треугольнике, а также найдём Y.
- Сузим M_1 и M_2 до треугольников.



Сумма выпуклых многоугольников: многоугольник ли?

- Выразим X и Y через вершины треугольников. Из ЛА
  $X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.
  $Y = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \mu_3 B_3$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geqslant 0, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.
- $X + Y = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \mu_3 B_3$ лежит в выпуклой оболочке множества точек $\{A_1 + B_1, A_1 + B_2, \ldots, A_3 + B_3\}$.

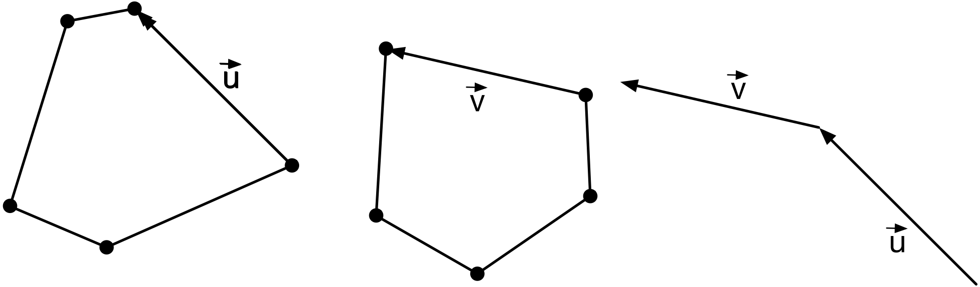
Сумма выпуклых многоугольников: многоугольник ли?

- Зафиксируем A_i и просуммируем по $j = 1..n$ $A_i + B_j$.
- $\sum\limits_{i,j} \lambda_i \mu_j (A_i + B_j) = \sum\limits_i \lambda_i A_i$, так как $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.
- Аналогично при варьировании j.
- Так как $\mu_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_i \mu_i = 1$, их сумма лежит в выпуклой оболочке.

Так как сумма Минковского — выпуклая оболочка суммы всех пар вершин $\to$ это многоугольник и он выпуклый.

Алгоритм нахождения суммы Минковского выпуклых многоугольников

- Найдём крайние левые нижние точки обоих многоугольников.
- Нарисуем $S_1 + S_2$ — одну их вершин суммы $M_1 + M_2$.
- Почему $S_1 + S_2 \in M_1 + M_2$? При сложении самых левых абсцисс в $S_1 + S_2$ нет точек левее. То же самое с ординатами.
- Рассмотрим вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$.



Алгоритм нахождения суммы Минковского выпуклых многоугольников

- Из двух векторов выбираем самый «крутой». Рисуем его из стартовой точки и продвигаемся по нему.
- Что такое «более крутой»? Векторное произведение $v_1 \times v_2 > 0$.
- Если $v_1 \times v_2 > 0$, то выбираем v_1, иначе v_2.
- Сравниваем следующие. Крутой рисуем, переключаемся на следующий.
- Конечная точка равна стартовой.
- Новый многоугольник — выпуклый.

Алгоритм работает за $O(N+M)$. Метод двух указателей.
Применения суммы Минковского.

1. Проверка пересечения двух выпуклых многоугольников.
2. Расстояние между выпуклыми многоугольниками.
3. Определение площади пересечения выпуклых многоугольников.
   Пересечение есть точка $P \in M_1, P \in M_2$.

Definition (Разность Минковского)

Разность Минковского есть $M_1 - M_2$ множество точек $\{P_1 - P_2 : P_1 \in M_1, P_2 \in M_2\}$.

Если точка $(0,0)$ лежит в разности Минковского — многоугольники пересекаются.

Проверка принадлежности точки выпуклому многоугольнику

- За $O(N)$ определяем левую нижнюю вершину P.
- Виртуально триангулируем из левой нижней вершины.
- Для каждой заданной точки бинарным поиском за $O(\log N)$ находим угол, которому она принадлежит.
- Для треугольника, образованного P и вершинами P_1 и P_2 определяем принадлежность за $O(1)$.
- Амортизированное время поиска — $O(\log N)$.